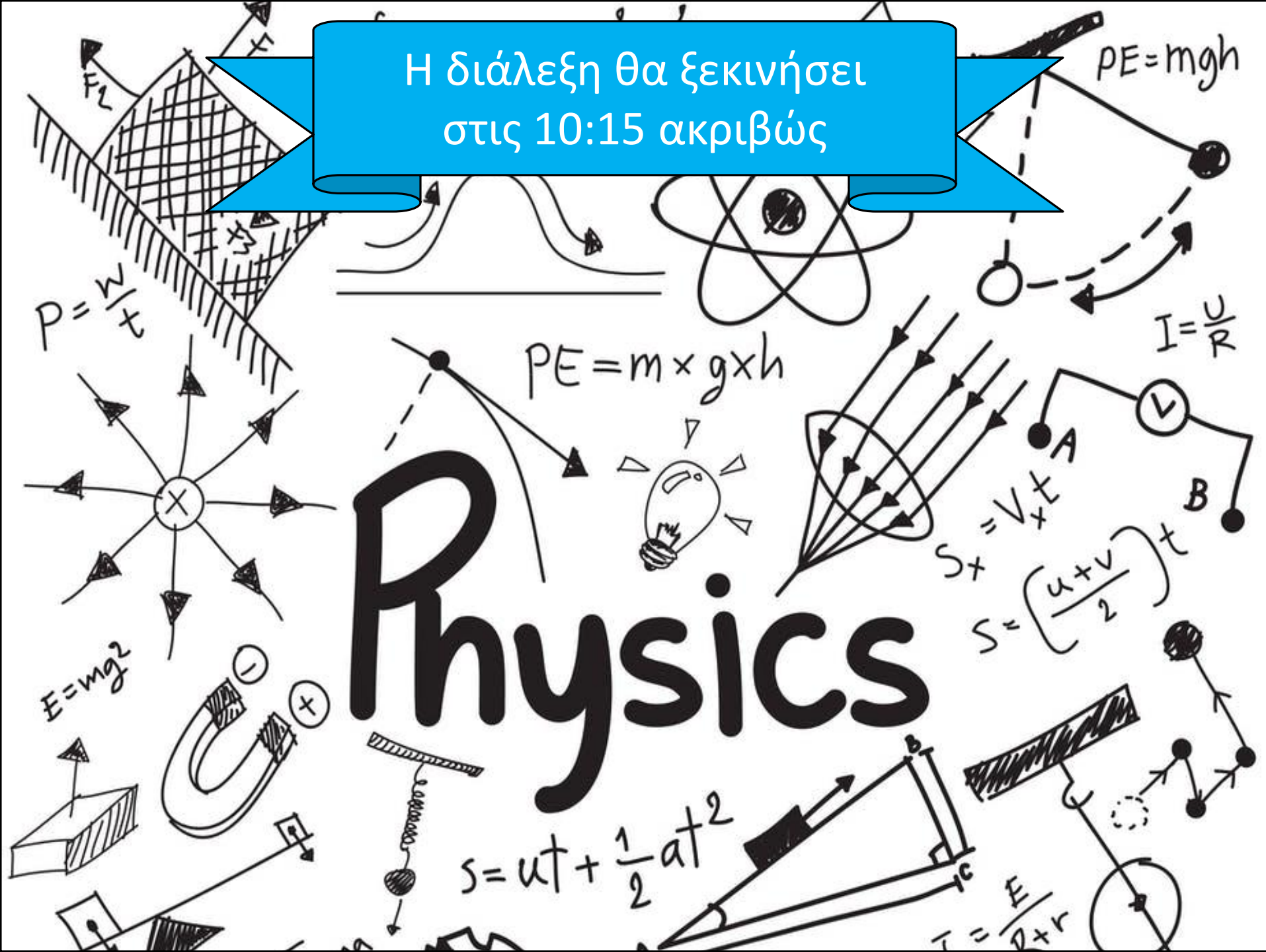


Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:15 ακριβώς

Physics





Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Διανύσματα++



Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

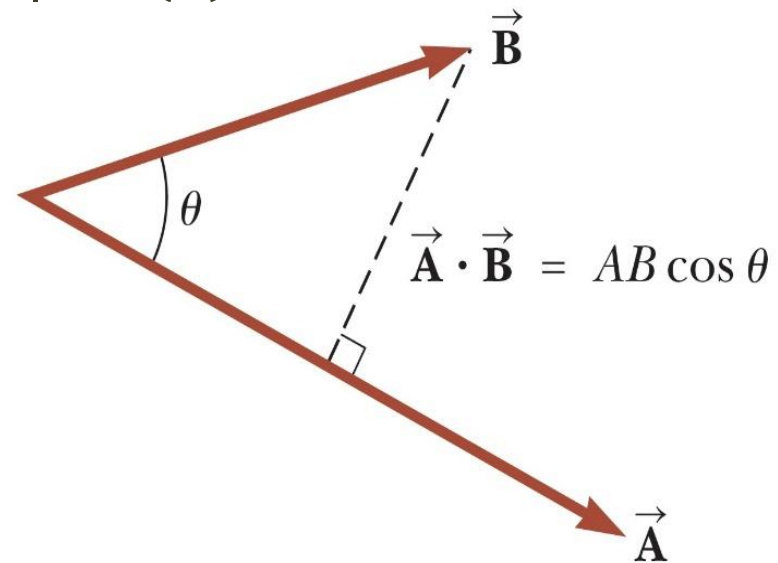
Διανύσματα++

Διανύσματα

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$
- Το **εσωτερικό τους γινόμενο** είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ορίζεται ως

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$

με θ τη μεταξύ τους γωνία

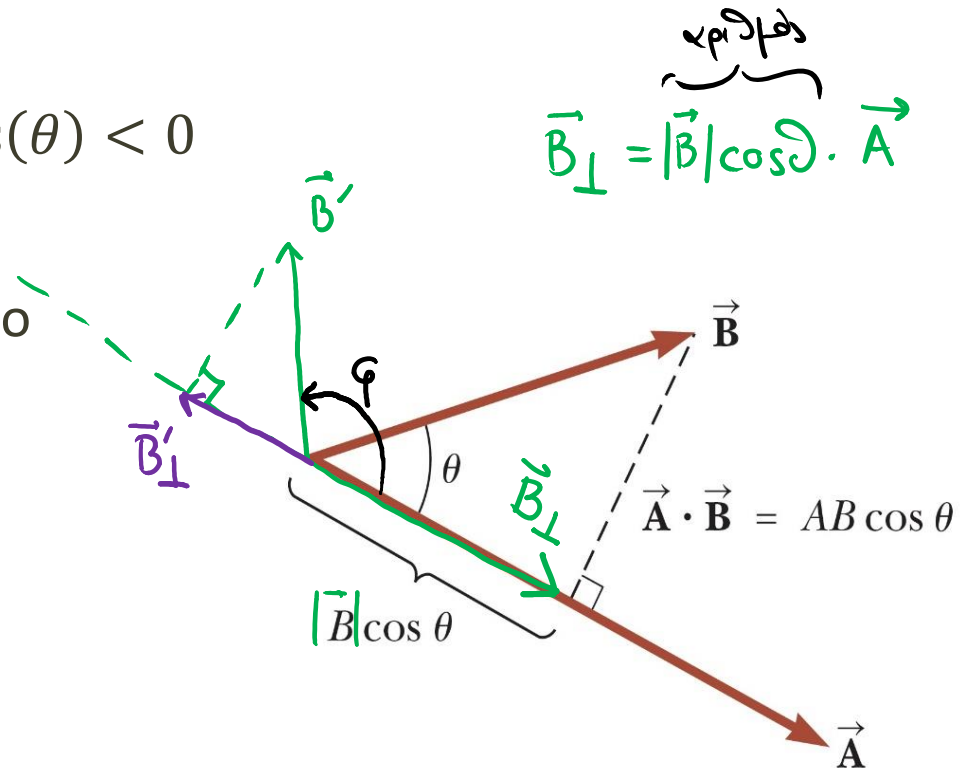


Διανύσματα

- Ας πούμε λίγα για το εσωτερικό γινόμενο
- Προσέξτε ότι $|\vec{B}| \cos(\theta) \vec{A}$ είναι η προβολή του $\vec{B}$ στο $\vec{A}$!

- Αν $\theta > \frac{\pi}{2}$ τότε $|\vec{B}| \cos(\theta) < 0$

- Άρα το εσωτ. γινόμενο είναι πραγματικός αριθμός



Διανύσματα

- Αντιμεταθετικότητα

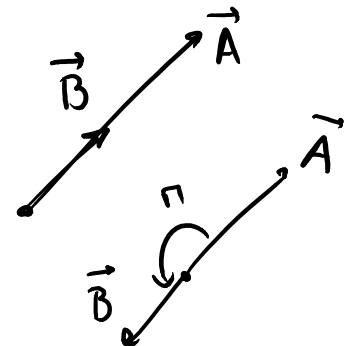
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

- Επιμεριστικότητα

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

- Ειδικές περιπτώσεις

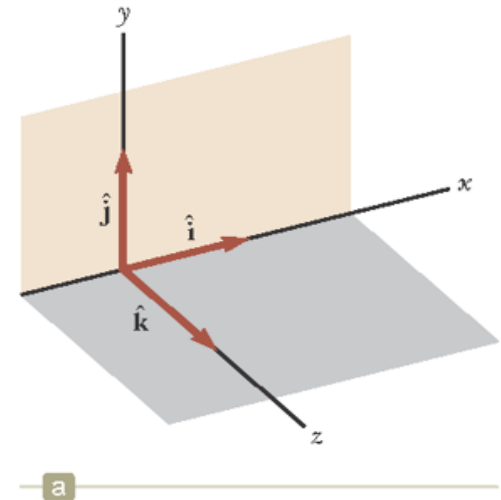
- $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (γιατί $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$)
- $\vec{A} \uparrow \uparrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$ (γιατί $\cos(0) = 1$)
- $\vec{A} \uparrow \downarrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}||\vec{B}|$ (γιατί $\cos(\pi) = -1$)



Διανύσματα

- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
 - Ορίζουν ένα 3Δ χώρο
- Εύκολα αποδεικνύεται (κάντε το! 😊) ότι

$$\begin{aligned}\vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0\end{aligned}$$



- Για $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$, $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$,
έχουμε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Διανύσματα

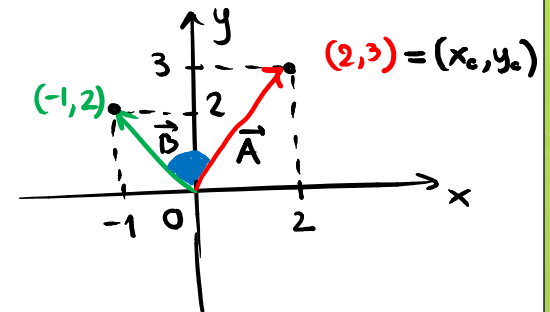
$$|\vec{A}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

● Παράδειγμα:

- Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων

$$\vec{A} = (2\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\vec{B} = (-\vec{i} + 2\vec{j})$$



Είναι $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \underline{\cos \theta}$ X

οπότε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) = -2 \overset{1}{\vec{i} \cdot \vec{i}} + 4 \overset{0}{\vec{i} \cdot \vec{j}} - 3 \overset{0}{\vec{j} \cdot \vec{i}} + 6 \overset{1}{\vec{j} \cdot \vec{j}} \quad \text{ } 1$$

$$\begin{aligned} \text{Τέλος, } \cos \theta &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{65}} \right) \approx 60^\circ \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &= -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \\ &= 4 \end{aligned} \right.$$

Παράγωγος

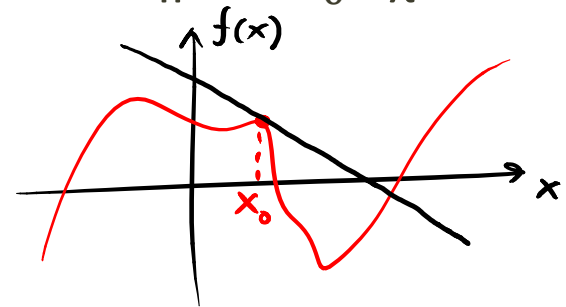
- Αν $f(x)$ συνεχής συνάρτηση του x τότε ορίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης ως

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Bigg\} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

- Η παράγωγος εκφράζει πόσο γρήγορα (ρυθμός μεταβολής) μεταβάλλεται η συνάρτηση $f(x)$ συναρτήσει του x
- Η εφαπτομένη μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 έχει «κλίση» (συντελεστή διεύθυνσης) $f'(x_0)$

- 2^η παράγωγος: $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

- 3^η παράγωγος: $f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x)$



Παράγωγος

Κανόνες

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{(f'(x)g(x) - g'(x)f(x))}{g^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}c = 0, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Παράγωγοι

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = f'(x)\frac{1}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(f(x)) = f'(x)\cos(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}\cos(f(x)) = -f'(x)\sin(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Ολοκλήρωμα

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

- Το ολοκλήρωμα είναι – σχεδόν – η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης

- Για παράδειγμα, αν $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$, τότε

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

- Με άλλα λόγια, όταν θέλω να υπολογίσω το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $F(x)$, αναζητώ μια συνάρτηση $f(x)$, η οποία ονομάζεται *παράγουσα*, την οποία αν παραγωγίσω θα πάρω την $F(x)$
- Το παραπάνω ολοκλήρωμα ονομάζεται **αόριστο** ολοκλήρωμα, γιατί δεν ορίζουμε ρητά σε ποió διάστημα του x ολοκληρώνουμε
 - Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι πάντα μια συνάρτηση κάποιας ανεξάρτητης μεταβλητής (όπως το x εδώ)
- Το σύμβολο dx μας δηλώνει τη *μεταβλητή ολοκλήρωσης*

Ολοκλήρωμα

- Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

Παρατηρήστε ότι ισχύει και

$$\frac{d}{dx} (x^3 + c) = 3x^2, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

και άρα το πιο σωστό θα ήταν να πούμε ότι

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Η πιο σημαντική ιδιότητα της ολοκλήρωσης είναι η **γραμμικότητα**:

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Ολοκλήρωμα

- Πιο γενικά λοιπόν, αν $F(x) = f'(x)$ τότε

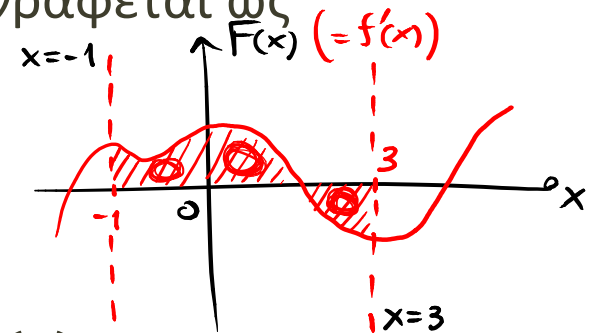
$$\int F(x)dx = f(x) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Αντίθετα, ένα **ορισμένο** ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_a^b F(x)dx$$

και υπολογίζεται ως

$$\int_a^b F(x)dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$



- Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πάντα ένας αριθμός – ΟΧΙ μια συνάρτηση (στα πλαίσια του μαθήματος)
 - ... και ποτέ δεν περιλαμβάνει σταθερά c στο αποτέλεσμα
 - Ερμηνεύεται ως η επιφάνεια “κάτω” από τη συνάρτηση $F(x)$ από την ευθεία $x = a$ ως την ευθεία $x = b$

Ολοκλήρωμα

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

• Παραδείγματα: $\checkmark (x^3)' = 3x^2$
 $\checkmark (\frac{1}{3}x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\int (x^2 + 3x + 2) dx = ? \quad \checkmark (\frac{3}{2}x^2)' = \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x$$

$$\checkmark (2x)' = 2$$

$$\int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2) dx = ?$$

$$\bullet \int (x^2 + 3x + 2) dx = \int (\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x)' dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$$

$$\bullet \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2) dx = \underbrace{\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right)}_{g(x)} \Big|_{-2}^{-1} = g(-1) - g(-2) = -\frac{1}{6}$$

Ολοκλήρωμα

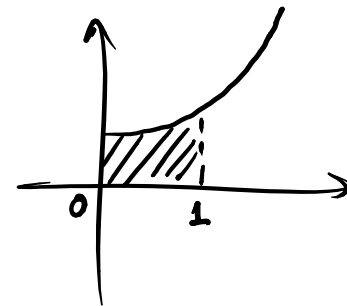
• Παραδείγματα:

$$(e^{ax})' = (ax)' e^{ax} = \underline{a e^{ax}}$$

$$\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)' = \frac{1}{a} (ax)' e^{ax} = \frac{1}{a} a e^{ax} = e^{ax}$$

$$\int e^{ax} dx = ?$$

$$\int_0^1 e^{ax} dx = ?$$



$$\bullet \int e^{ax} dx = \int \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)' dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^1 e^{ax} dx &= \underbrace{\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)}_{g(x)} \bigg|_0^1 = g(1) - g(0) = \frac{1}{a} e^a - \frac{1}{a} e^0 = \\ &= \frac{1}{a} e^a - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} (e^a - 1). \end{aligned}$$

Ολοκλήρωμα

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

• Παραδείγματα:

$$\int \frac{k_e Q}{x} dx = ? \quad k_e Q \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int_a^b \frac{k_e Q}{x} dx = ?$$

$$\bullet \int k_e \frac{Q}{x} dx = k_e Q \int \frac{1}{x} dx = k_e Q \ln|x| + c$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_a^b \frac{k_e Q}{x} dx &= k_e Q \int_a^b \frac{1}{x} dx = k_e Q \ln|x| \Big|_a^b = \\ &= k_e Q (\ln|b| - \ln|a|) = k_e Q \ln \left| \frac{b}{a} \right| \end{aligned}$$



Εικόνα: Η κίνηση μπορεί να είναι αναζωογονητική και όμορφη. Αυτά τα σκάφη ανταποκρίνονται σε δυνάμεις αέρα, νερού, και του βάρους του πληρώματος όσο προσπαθούν να ισορροπήσουν στην άκρη του.

1^η Ενότητα Κλασική Μηχανική



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

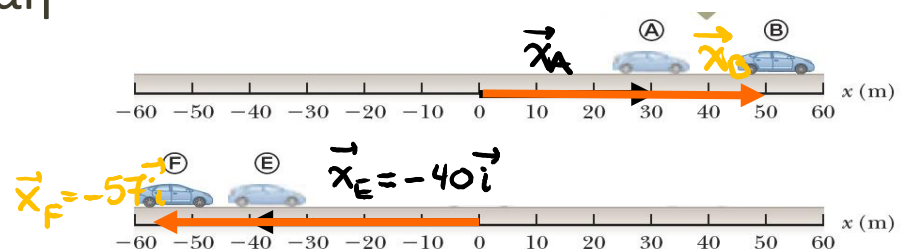
Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
 - Σώμα == σωματίδιο
 - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
 - Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής...
 - ...αρχικά σε μια διάσταση και μετά σε δυο διαστάσεις
 - Αυτοί είναι:
 - Η Θέση
 - Η Ταχύτητα
 - Η Επιτάχυνση
- ενός σώματος

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Θέση $\vec{x}$: διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (συντά το 0)
- Διανυσματικό μέγεθος
 - Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το $\vec{i}$ (οριζόντια κίνηση)
 - Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος
- Η θέση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική - ως τιμή
 - Θετική τιμή : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα
 - Αντίθετα για αρνητική τιμή
- Παράδειγμα:





Συνεχίζεται...

